遞迴函式 – Ackermann Function

丁培毅

實習目標：

1. 練習設計遞迴函式
2. 練習遞迴的思考方式
3. 追蹤遞迴函式的運作
4. 練習遞迴函式的偵錯方法

遞迴函式 – Ackermann Function

1. 請撰寫一個程式，計算出下表中 Ackermann Function 的數值，Ackermann Function 的定義如下：

$$A(m, n) = \begin{cases} n+1, & m=0 \\ A(m-1, 1), & m>0, n=0 \\ A(m-1, A(m,n-1)), & m>0, n>0 \end{cases}$$

2. 程式輸出範例如下：

```
A(0, 0) = 1
A(0, 1) = 2
.....
A(3, 9) = 4093
A(4, 0) = 13
A(4, 1) = 65533
A(5, 0) = 65533
```

m\n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n+1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n+2
2	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	2n+3
3	5	13	29	61	125	253	509	1021	2045	4093	2^{n+3}-3
4	13	65533									$2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$-3
5	65533										

$13=2^{2^2}-3$, $65533=2^{2^{2^2}}-3$, 表格上其它沒有顯示的數值有數學上的定義, 但是在計算上用現成的整數變數型態無法表示 $A(4,2)=A(3,65533)=2^{65536}-3$, $A(5,1)=A(4,65533)=??$

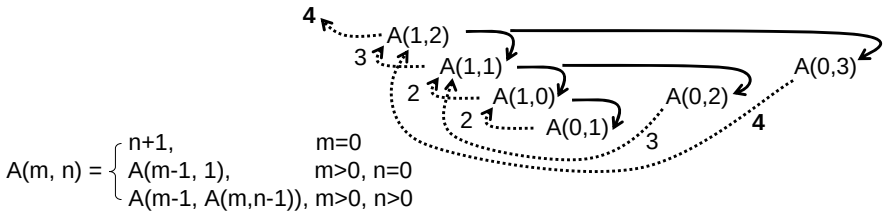
分析

1. 要用遞迴函式來計算 Ackermann Function 在某些參數 m, n 的數值時, 基本上還是遵循設計遞迴函式解的基本步驟：
   a. 定義出遞迴函式以及其參數 (遞迴函式一定需要, 不可以用全域變數取代)
   b. 想清楚這個遞迴函式在某一參數時能夠解的問題是什麼
   c. 把需要解決的問題拆解爲較小的問題
   d. 呼叫遞迴函式解決這個小問題, 並且用這個答案組合出原來問題的答案
   e. 問題縮到最小時 (base case) **可以直接寫出答案**
   但是 c, d 拆解和合成兩個步驟是 Ackermann Function 的定義已經幫你做好了的, 就好像在用遞迴函式計算 Fibonacci 數列的例子一樣, 只需要做 a, b, e 三個步驟就可以很快地完成這個程式, 我們先回憶一下計算 Fibonacci 數列的例子, **f(n)=f(n-1)+f(n-2), f(1)=f(2)=1**

```
int fibonacci(int n) {
   if ((n==2)||(n==1))
      return 1;
   else
      return fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2);
}
```


2.
```
a. int ackermann(int m, int n)
b. 這個函式計算並回傳 Ackermann function A(m,n) 的數值
c. 拆解爲小一點的問題: 計算 A(m-1,1), A(m,n-1) 與 A(m-1,A(m,n-1))
d. 直接依照 Ackermann function 的定義, 在參數滿足不同條件的情況下用比較小的
   問題的結果直接作爲最後的結果
e. A(0,n) 的數值是 n+1
```

3. 請實作上列設計 (請注意遞迴函式一定需要設計函式的參數, 一定需要有 base class 的結束條件, 遞迴呼叫前一定需要測試參數是否符合結束條件,不可以完全不測試就直接進行遞迴呼叫)
4. 設計完的遞迴函式裡面一般來說變數不多, 程式碼不多, 所以程式邏輯的複雜度不高 (相較於解同樣問題的迭代式程式來說), 程式看起來是很精簡的, 這是爲什麼說遞迴函式中程式碼的表達性很高的原因
5. 有人說遞迴函式是很容易偵錯的, 這個說法需要稍微保留一點, 也許對於熟悉撰寫程式的人來說是很容易的, 但是對於初學者來說, 需要很清楚地掌握遞迴函式的運作過程: 需要知道在任何時候會有許多層函式一個呼叫一個, 執行下層函式時上層函式都還沒有結束，每一層函式的參數以及部份執行結果也都還存在, 例如呼叫 A(1,2) 時, 會引發一連串 A(1,1), A(1,0), A(0,1), A(0,2), A(0,3) 的函式呼叫 (連同 A(1,2) 的呼叫共 6 次函式呼叫, 最深的呼叫爲第 4 層 A(0,1))



6. 呼叫 A(2,3) 時會引發 43 次呼叫 (其中最深的呼叫有 10 層), 呼叫 A(3,4) 時會引發 10306 次呼叫 (其中最深的呼叫有 127 層); 如果你知道程式的運作方式, 看到程式沒有預期的表現時才能夠一步一步找出問題, 並且更正程式碼, 接下來你可以思考一件事, 就是怎樣修改程式讓它在執行過程中記錄上面這些資料 – 總共呼叫幾次, 最深的呼叫有幾層…這個數值一般來說會盡量用理論推演得到, 而不見得是用程式執行得到; 總呼叫次數和程式執行時間直接相關, 最深有幾層呼叫則和系統堆疊須要準備多大有關係
7. 偵錯這種遞迴架構的程式時, 一開始可以先直接呼叫 base case, 檢查答案是不是對的, 然後呼叫大一點點的問題,檢查答案是不是對的, 再大一點點, …, 然後檢查大問題會分解成較小問題的過程 - 分解與合成是否正確? 列印函式每一次呼叫的參數和回傳值是有很大幫助的, 可以驗證分解的過程是否正確, 合成的動作是否符合預期

8. 遞迴函式很大的缺點是執行的速度, 像前面呼叫 A(3,4) 會引發 10306 次的函式呼叫, 就會使得執行效率很差, (如果你回想計算 fibonacci 數列的遞迴函式也會發現計算 f(n) 需要呼叫函式 $O(2^n)$ 次), 解決的方法其實就是不要用遞迴…用迴圈來計算fibonacci 數列的方法很簡單: f(n)=f(n-1)+f(n-2), f(1)=f(2)=1
假設我們需要計算 f(20), 就用一個陣列存放 f(1), f(2), …, f(20)
f(1), f(2) 都是 1, f(3) 則是前面兩個的和, f(4) 是 f(2), f(3) 的和, 算到 f(20) 就好了, 也就是

```
int i, f[21] = {0, 1, 1};
for (i=3; i<=20; i++) f[i] = f[i-1] + f[i-2];
printf("f(20)=%d\n", f[20]);
```

迴圈只要執行 18 次, 使用 21 個元素的整數陣列, 存取記憶體 54 次, 所以要改進 Ackermann 函式的計算速率就需要用迴圈, 可以把 A(m,n) 都記錄在陣列裡, 如此就可以用記憶體來換取時間, 參數相同的 A(m,n) 只需要計算一次就好, 不需要重複計算很多次。以前面的表格來說, 如果需要計算 m:0~3, n:0~9, 以 A(3,9) 來說, 需要 A(2, A(3,8))=A(2,2045), 所以如果不用表格最後一行的公式的話, 需要的陣列維度是 int A[4][2046], 如果要計算 A(4,1) 的話, A(4,1)=A(3, A(4,0))=A(3,13)=A(2,A(3,12))=A(2,32765), 需要的陣列宣告是 int A[4][32766], 所以用迴圈計算 Ackermann function 需要大量記憶體