第十五章
位元處理

各種進位系統

位元運算子的使用方法

位元欄位結構的使用

數字系統概述

- 十進位的計數方式是由 0 到 9，遇到 10 即進位
  - 6935 可以用下式表達：

$$6935_{10} = 6\times10^3 + 9\times10^2 + 3\times10^1 + 5\times10^0$$

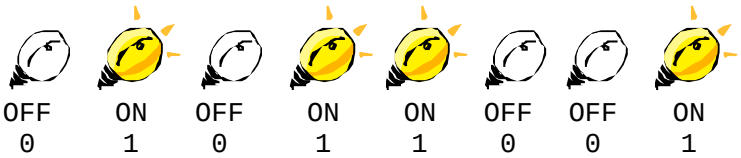
- 一個星期有七天，因此可以看成是七進位系統

表 15.1.1 十進位、七進位與星期系統的對照

十進位	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
七進位	0	1	2	3	4	5	6	10	11	12	13	14	15	16	20	21	22
星期系統	日	一	二	三	四	五	六	日	一	二	三	四	五	六	日	一	二

位元與位元組

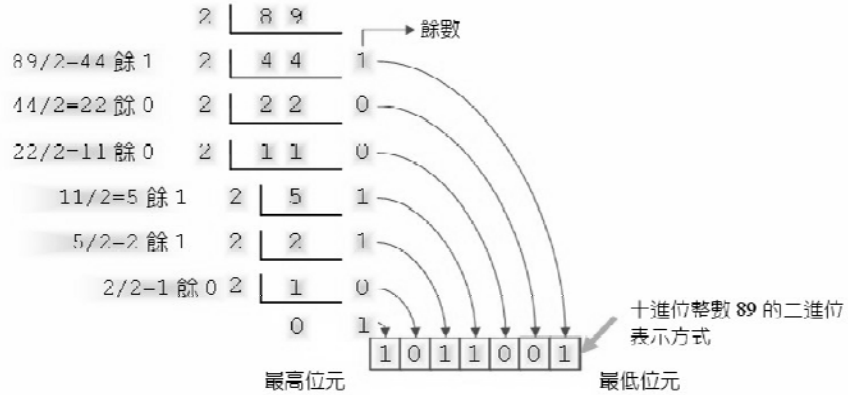
- 二進位以 0 與 1 表示數字，如此可以代表許多資訊：



- 最小的儲存單位是位元（bit）
- 一個位元組 (bytes) 等於 8 個位元
- 用光、電和磁的訊號在儲存、傳輸和計算時以二進位制表示時容錯能力最高

二進位系統

- 將十進位整數 89 轉換成二進位的計算過程：



$$1011001_2 = 1\times2^6 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^0 = 89_{10}$$

數字系統轉換的範例 (1/2)

- 下面的show_binary() 可將十進位整數轉換成二進位：

```
01  /* prog15_1, 將十進位整數以二進位來表示 */
02  #include <stdio.h>
03  #include <stdlib.h>
04  #define SIZE 8            /* 定義SIZE為8，代表以8個數字顯示二進位 */
05  void show_binary(int);    /* 宣告 show_binary()函數的原型 */
06  int main(void)
07  {
08     printf("89 的二進位為: ");
09     show_binary(89);       /* 顯示 89 的二進位*/
10
11     system("pause");
12     return 0;
13  }
```


數字系統轉換的範例 (2/2)

```
14  void show_binary(int num)  /* 函數 show_binary()的定義 */
15  {
16     int i,b[SIZE]={0};      /* 宣告陣列b，並設定元素的初值都是 0 */
17     for(i=1;i<=SIZE;i++)
18     {
19        b[SIZE i]=num%2;     /* 將 num%2 的餘數設定給 b[SIZE i]存放 */
20        num=num/2;           /* 將 num/2 的值設回給 num */
21     }
22     for(i=0;i<SIZE;i++)
23        printf("%d",b[i]);
24     printf("\n");
25  }
```

```
/* prog14_1 OUTPUT--
89 的二進位為: 01011001
----------------------*/
```


八進位系統

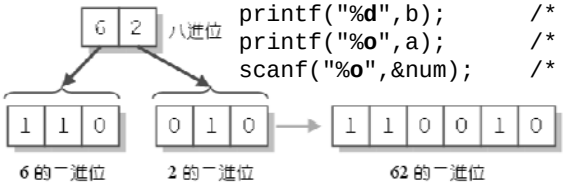
- 八進位數字系統: 以8為基底，由0~7等8個數字所組成

表 15.3.1 八進位和二進位的相對應值

八進位	0	1	2	3	4	5	6	7
進位	000	001	010	011	100	101	110	111

- 八進位的每一個位數可看成是三個二進位數字的組合：

```
int num,a=38,b=062;  /* 設定a=38，b為八進位的62 */
printf("%d",b);      /* 將變數b的值以十進位印出 */
printf("%o",a);      /* 將變數a的值以八進位印出 */
scanf("%o",&num);    /* 從鍵盤輸入一個八進位的整數 */
```



十六進位系統 (1/2)

- 十六進位數字系統就是以 16 為基底的數字系統

十進位	二進位	八進位	十六進位
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

十六進位系統 (2/2)

- 十六進位的5D，可以寫成下面的式子

$$5D_{16} = 5\times16^{1} + 13\times16^{0} = 93_{10}$$

- 下面是一些十六進位整數在使用上的範例：

```
int num,a=25,b=0x6A;   /* 設定a=25，b的值為十六進位的6A */
printf("%d",b);        /* 將變數b的值以十進位印出 */
printf("%x",a);        /* 將變數a的值以十六進位印出 */
scanf("%x",&num);      /* 從鍵盤輸入一個十六進位的整數 */
```


位元邏輯運算子

- 位元邏輯運算子可用來對每一個位元做邏輯運算
- 下表列出了位元邏輯運算子：

表 15.4.1 位元邏輯運算子

位元邏輯運算子	意義
~	位元 NOT 運算子
&	位元 AND 運算子
|	位元 OR 運算子
^	位元 XOR 運算子

NOT運算子「~」

- 「~」運算子用來將位元顛倒
  - 使位元值為 0 者變成 1，位元值 1 者變成 0：

表 15.4.2 NOT 運算子「~」之真值表

a	~a
0	1
1	0

-123 == ~123 + 1

AND運算子「&」

- AND運算子「&」
  - 將運算子左、右兩邊運算元裡的每一個位元進行 AND 運算

表 15.4.3 AND 運算子「&」之真值表

a	b	a&b
0	1	0
0	0	0
1	1	1
1	0	0

  - 設變數a=105，b=26，則 a&b 的結果為 8

	0 1 1 0 1 0 0 1	十進位的值為 105
	0 0 0 1 1 0 1 0	十進位的值為 26
a&b	0 0 0 0 1 0 0 0	十進位的值為 8

位元AND運算子「&」的範例

- AND運算子「&」的範例

```
/* prog14_2, 位元 AND 運算子「&」的範例說明 */
#include <stdio.h>
int main(void)
{
   int a=105,b=26;
   printf("%d&%d=%d\n",a,b,a&b);    /* 計算 a&b 的值 */

   system("pause");
   return 0;
}

/* prog14_2 OUTPUT---
105&26 8
                    */
```

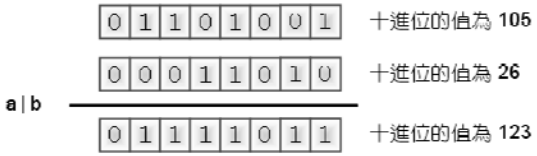

OR運算子「|」

- OR運算子「|」
  - 可將運算子左、右兩邊運算元裡的每一個位元進行 OR 運算：

表 15.4.4　OR 運算子「|」之真值表

a	b	a | b
0	1	1
0	0	0
1	1	1
1	0	1

  - 下圖為計算 a|b 的運算結果：



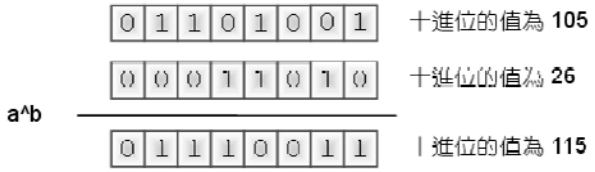
XOR運算子「^」

- XOR運算子「^」：
  - 只有一個位元為 1 時其結果才會為 1，其餘皆為 0

表 15.4.5　XOR 運算子「^」之真值表

a	b	a ^ b
0	1	1
0	0	0
1	1	0
1	0	1

  - 下圖為計算 a^b 的運算結果：

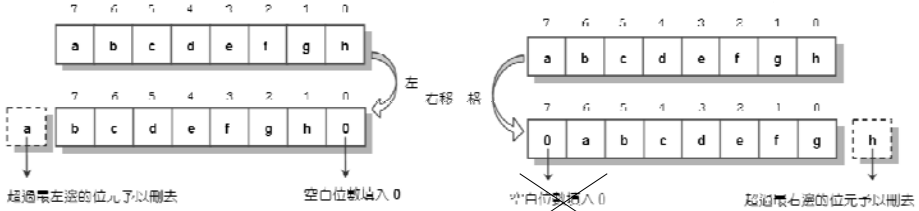


位元位移運算子

- 位元位移運算子可將位元左移或右移 n 個位元

表 15.4.6　位元位移運算子

位元位移運算子	意義
num << n	左移，將 num 的位元向左移 n 個位元
num >> n	右移，將 num 的位元向右移 n 個位元



左移運算子　　右移運算子

位元左移運算子的範例

- 下面的程式可將整數89左移一個位元：

```
/* prog15_3, 左移運算了「<<」的使用範例 */
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define SIZE 8          /* 定義 SIZE 為 8，代表以 8 個數字來顯示二進位 */
void show_binary(int);    /* 宣告 show_binary() 函數的原型 */
int main(void)
{
   int a;
   a=(89<<1);     /* 將整數 89 往左移  個位元，然後設定給變數 a 存放 */
   printf("89 二進位的值為: ");
   show_binary(89);              /* 顯示數字 89 的二進位 */
   printf("左移  個位元後: ");
   show_binary(a);               /* 顯示 89 左移一個位元後的二進位 */
   printf("左移  個位元後的十進位值為: %d\n",a);
   system("pause");
   return 0;
}
```


位元欄位

低階的驅動程式常常使用

- 位元欄位：
  - 一種特別的結構，能夠充分使用到結構變數中的每一個位元

位元欄位結構的宣告格式

```
struct 位元欄位結構的名稱
{
   資料型態  欄位名稱1: 位元長度;
   資料型態  欄位名稱2: 位元長度;
      ...
   資料型態  欄位名稱n: 位元長度;
};
```


位元運算子的優先順序

- 本來就是一張表定義運算式裡面運算子的先後順序而已, 如果你很習慣在運算式裡面使用**小括號**, 那就完全沒有問題
- 如果你沒有這種習慣, 在**運算式中使用位元運算子**要特別注意, 例如：

  if (x & mask == 16) { … }

  是檢查位元運算 x & (mask==16) 是否非 0

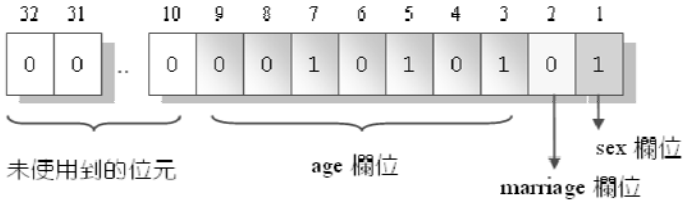
  並不是檢查 x & mask 是不是 16, 除非寫成

  if ((x & mask) == 16) { … }

1	++ --	3	* / %
	()	4	+ -
	[]	5	<< >>
	.	6	< <=
	->		> >=
2	++ --	7	== !=
	+ -	8	&
	! ~	9	^
	(type)	10	|
	*	11	&&
	&	12	||
	sizeof	13	?:
		14	=
			+= -=
			*= /= %=
			<<= >>=
			&= ^= |=
		15	,

位元欄位結構宣告的範例

```
struct status                /* 定義位元欄位結構 */
{
   unsigned sex:1;           /* sex欄位，佔1個位元 */
   unsigned marriage:1;      /* marriage欄位，佔1個位元*/
   unsigned age:7;           /* age欄位，佔7個位元*/
};
struct status tom;           /* 宣告struct status的結構變數tom */
```



位元欄位結構的使用範例 (1/2)

```
/* prog15_4, 位元欄位結構的使用 */
#include <stdio.h>
int main(void)
{
   struct status              /* 定義位元欄位結構 */
   {
      unsigned sex:1;
      unsigned marriage:1;
      unsigned age:7;
   };
   struct status tom={1,0,21};  /* 宣告並設定結構變數的初值 */

   if(tom.sex==0)             /* 判別 sex 欄位的位元是否為 0 */
      printf("性別:女,");
   else
      printf("性別:男,");
```


位元欄位結構的使用範例 (2/2)

```

   if(tom.marriage==0)        /* 判別 marriage 欄位的位元是否為 0 */
      printf("未婚,");
   else
      printf("已婚,");

   printf("%d 歲\n",tom.age);   /* 印出 age 欄位的值 */

   printf("sizeof(tom)=%d\n",sizeof(tom));  /* 印出變數 tom 的大小 */

   system("pause");
   return 0;
}

/* prog15_4 OUTPUT--
性別:男,未婚,21 歲
sizeof(tom)=4
                    */
```


一些有趣的算法

- 不用迴圈，判斷是否為 2 的指數

```
bool is_power_of_2(int x) {
   return !(x & (x-1));
}
```

- 遺失的數字

```
int array[9] =
   {2, 3, 5, 9, 4, 6, 10, 8, 1};
int find_missing_number() {
   int i, n = 0;
   for (i=0; i<10; ++i) n ^= i;
   for (i=0; i<9; ++i) n ^= array[i];
   return n;
}
```

- 找到最低位的 1 位元

```
int least_significant_1_bit(int x) {
   return x & -x;
}
```

- 交換兩個變數裡的數值

```
void swap(int *x, int *y) {
   *x = *x ^ *y;
   *y = *x ^ *y;
   *x = *x ^ *y;
}
```


Zero Judge d244: 一堆石頭

- 潘潘有一堆石頭，每顆石頭上面都有一個正整數編號。她利用複製機器把每顆石頭都複製了兩次，每個複製品的編號和原來的一樣。
- 有一天她不小心掉了一顆石頭，現在給你剩下的每一顆石頭的編號，她**想要找出她掉的那一顆石頭的編號**。

- **範例輸入**：9 8 6 9 8 2 3 5 2 1 6 8 1 5 1 2 3 3 5 9
- **範例輸出**：6

- **直覺作法**：如果有一個很大的陣列，讀入一個數字以後就把相對的元素加 1，最後看哪一個數字出現的次數不是 3 的倍數就完成了
- **問題**：需要有 2^{31} 個元素的陣列

- **觀察**：

9: 1001	9: 1001
5: 0101	5: 0101
9: 1001	9: 1001
9: 1001	9: 1001
5: 0101	5: 0101
'1' 個數 3205	5: 0101
	3306

和CPU架構相關的程式加速

```
int compare (const void * a, const void * b) { return ( *(int*)a - *(int*)b ); }
…
int data[32768];
for (unsigned c = 0; c < 32768; ++c) data[c] = rand() % 256;
qsort(data, 32768, sizeof(int), compare);
clock_t start = clock();
long long sum = 0;
for (unsigned i = 0; i < 100000; ++i)
   for (unsigned c = 0; c < 32768; ++c)
        if (data[c] >= 128) sum += data[c];
double elapsedTime = ((double)(clock() - start)) / CLOCKS_PER_SEC;
```

11.78 sec without qsort

2.35 sec with qsort

Core i7 920 @ 3.5 GHz

Branch prediction

```
int t = (data[c] - 128) >> 31;
sum += ~t & data[c];
```

2.56 sec without qsort

2.59 sec with qsort

UVa Bit Operation Related

- UVa 11659 Informats CPE 2022/03/22
  UVa 10718 Bit Mask
  UVa 12898 And Or
  UVa 11645 A-Bits
  UVa 10393 The One-Handed Typist
  UVa 509 RAID!
  UVa 12444 Bits and Pieces
  UVa 183 Bit MapsUVa 10944 Nuts for Nuts (DP 狀態壓縮 with bits)